TD Série N° : 2 Logique des propositions

Exercice 1 : (FNC,FND) Considérons la fonction booléenne suivante ::

- donner la forme normale disjonctive et la forme normale conjonctive de F( ).

A	B	C	F(A,B,C)
V	V	V	F
V	V	F	V
V	F	V	V
V	F	F	F
V	V	V	V
V	V	F	F
F	F	V	V
F	F	F	V

Exercice 2 : Soit le système d'axiomes du calcul propositionnel :

- Ax1 : $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
- Ax2 : $(A \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
- Ax3 : $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$
- et la règle du Modus Ponens : si $\vdash A$ et $\vdash A \rightarrow B$ alors $\vdash B$.

Montrer que l'on a :

$$\frac{A}{B \rightarrow A} \qquad \frac{(A \rightarrow B), (B \rightarrow C)}{(A \rightarrow C)} \qquad \frac{A \rightarrow (B \rightarrow C)}{B \rightarrow (A \rightarrow C)}$$

SOLUTION /

a)

$$\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B \rightarrow A}}$$

1. A — hypothèse
2. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ — Ax1
3. $B \rightarrow A$ — MP (1, 2)

b)

$$\frac{\mathbf{(A \rightarrow B), (B \rightarrow C)}}{\mathbf{(A \rightarrow C)}}$$ **Transitivité**

1. $A \rightarrow B$ — hypothèse
2. $B \rightarrow C$ — hypothèse
3. $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ — a) + 2.
4. $(A \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$ — Ax2
5. $((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$ — MP (3, 4).
6. $A \rightarrow C$ — MP (1, 5).

c) $\dfrac{\mathbf{A \to (B \to C)}}{\mathbf{B \to (A \to C)}}$ **Permutation**

1. $A \to (B \to C)$	hypothèse
2. $(A \to (B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$	Ax2
3. $((A \to B) \to (A \to C))$	MP (1, 2).
4. $B \to (A \to B)$	Ax1
5. $B \to (A \to C)$	Transitivité (4,3)

Exercice 3 : : En utilisant éventuellement les résultats de l'exercice précédent et du présent, montrer que les formules suivantes sont des théorèmes du C.P :

a) $p \to p$
b) $\neg\neg B \to B$
c) $B \to \neg\neg B$
d) $\neg A \to (A \to B)$
e) $(\neg B \to \neg A) \to ((\neg B \to A) \to B)$
f) $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$
g) $A \to (\neg B \to \neg(A \to B))$
h) $(A \to B) \to ((\neg A \to B) \to B)$
i) $((A \to B) \to A) \to A$

SOLUTION /

a) $\vdash \mathbf{p \to p}$

1. $p \to ((p \to p) \to p)$	Ax1
2. $(p \to ((p \to p) \to p)) \to ((p \to (p \to p)) \to (p \to p))$	Ax2
3. $((p \to (p \to p)) \to (p \to p))$	MP (1,2).
4. $p \to (p \to p)$	Ax1
5. $p \to p$	MP (3,4).

b) $\vdash \mathbf{\neg\neg B \to B}$

1. $\neg\neg B \to (\neg\neg\neg\neg B \to \neg\neg B)$	Ax1
2. $(\neg\neg\neg\neg B \to \neg\neg B) \to (\neg B \to \neg\neg\neg B)$	Ax3
3. $(\neg B \to \neg\neg\neg B) \to (\neg\neg B \to B)$	Ax3
4. $(\neg\neg\neg\neg B \to \neg\neg B) \to (\neg\neg B \to B)$	Transitivité + 2. + 3.
5. $\neg\neg B \to (\neg\neg B \to B)$	Transitivité + 1. + 4.
6. $(\neg\neg B \to (\neg\neg B \to B)) \to ((\neg\neg B \to \neg\neg B) \to (\neg\neg B \to B))$	Ax2

7. $((\neg\neg B \to \neg\neg B) \to (\neg\neg B \to B))$ MP + 5. + 6.
8. $\neg\neg B \to \neg\neg B$ théorème 1) Exo 11
9. $\neg\neg B \to B$ MP + 7. + 8.

c) $\vdash \mathbf{B \to \neg\neg B}$

1. $\neg\neg\neg B \to \neg B$	théorème b)
2. $(\neg\neg\neg B \to \neg B) \to (B \to \neg\neg B)$	Ax3
3. $B \to \neg\neg B$	MP + 1. + 2.

d) $\vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$

1. $\neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$	Ax1
2. $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$	Ax3
3. $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$	Transitivité + 1. + 2.

e) $\vdash (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow B)$

1. $\neg B \rightarrow \neg A$	hypothèse
2. $\neg B \rightarrow A$	hypothèse
3. $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$	Ax3
4. $A \rightarrow B$	MP + 1. + 3.
5. $\neg B \rightarrow B$	Transitivité + 2. + 4.
6. $\neg B \rightarrow (B \rightarrow \neg (\neg B \rightarrow A))$	théorème d)
7. $(\neg B \rightarrow (B \rightarrow \neg (\neg B \rightarrow A))) \rightarrow ((\neg B \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg (\neg B \rightarrow A)))$	Ax2
8. $(\neg B \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg (\neg B \rightarrow A))$	MP + 6. + 7.
9. $\neg B \rightarrow \neg (\neg B \rightarrow A)$	MP + 5. + 8.
10. $(\neg B \rightarrow \neg (\neg B \rightarrow A)) \rightarrow ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow B)$	Ax3
11. $(\neg B \rightarrow A) \rightarrow B$	MP + 9. + 10.
12. B	MP + 2. + 11.

On a donc montré $(\neg B \rightarrow \neg A), (\neg B \rightarrow A) \vdash B$; en appliquant deux fois le théorème de déduction on obtient $\vdash (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow B)$.

f) $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$

1. $A \rightarrow B$	hypothèse
2. $B \rightarrow \neg\neg B$	théorème c)
3. $A \rightarrow \neg\neg B$	Transitivité + 1. + 2.
4. $\neg\neg A \rightarrow A$	théorème b)
5. $\neg\neg A \rightarrow \neg\neg B$	Transitivité + 3. + 4.
6. $(\neg\neg A \rightarrow \neg\neg B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$	Ax3
7. $\neg B \rightarrow \neg A$	MP + 5. + 6.

On a donc montré $(A \rightarrow B) \vdash (\neg B \rightarrow \neg A)$; en appliquant le théorème de déduction on obtient le théorème $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$.

g) $\vdash A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg (A \rightarrow B))$

1. $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$	théorème a)
2. $A \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow B)$	Permutation + 1.
3. $((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg (A \rightarrow B))$	théorème f)
4. $A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg (A \rightarrow B))$	Transitivité + 2. + 3.

h) $\vdash (A \to B) \to ((\neg A \to B) \to B)$

1. $A \to B$	hypothèse
2. $\neg A \to B$	hypothèse
3. $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$	théorème f)
4. $\neg B \to \neg A$	MP + 1. + 3.
5. $\neg B \to B$	Transitivité + 2. + 4.
6. $\neg B \to (B \to \neg (\neg A \to B))$	théorème d)
7. $(\neg B \to (B \to \neg (\neg A \to B))) \to ((\neg B \to B) \to (\neg B \to \neg (\neg A \to B)))$	Ax2
8. $(\neg B \to B) \to (\neg B \to \neg (\neg A \to B))$	MP + 6. + 7.
9. $\neg B \to \neg (\neg A \to B)$	MP + 5. + 8.
10. $(\neg B \to \neg (\neg A \to B)) \to ((\neg A \to B) \to B)$	Ax3
11. $(\neg A \to B) \to B$	MP + 9. + 10.
12. B	MP + 2. + 11.

On a donc montré $(A \to B), (\neg A \to B) \vdash B$; en appliquant deux fois le théorème de déduction
on obtient $\vdash (A \to B) \to ((\neg A \to B) \to B)$.

i) $\vdash ((A \to B) \to A) \to A$

1. $(A \to B) \to A$	hypothèse
2. $((A \to B) \to A) \to (\neg A \to \neg (A \to B))$	théorème f)
3. $\neg A \to \neg (A \to B)$	MP + 1. + 2.
4. $(\neg A \to \neg (A \to B)) \to ((\neg A \to (A \to B)) \to A)$	théorème e)
5. $(\neg A \to (A \to B)) \to A$	MP + 3. + 4.
6. $\neg A \to (A \to B)$	théorème d)
7. A	MP + 5. + 6.

On a donc montré $((A \to B) \to A) \vdash A$; en appliquant le T.D on aura : $\vdash ((A \to B) \to A) \to A$.